Rozšíření MA1 - domácí úkol 1 (lineární algebra)

---

1. Najděte hodnotu parametru t, pro kterou jsou lineárně závislé vektory
$$\vec{v}_1 = (1, 1, 3), \vec{v}_2 = (1, 2, 1), \vec{v}_3 = (t, -1, 7).$$
Zjistěte pak, jakou lineární kombinací vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ je vytvořen nulový vektor.

(i) ? najdi $t \in \mathbb{R}$ tak, aby zadané vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ byly LZ ?

(použijeme eliminační úpravy soustavy vektorů (stejné jako u matice – můžeme napsat i do „matice" – takovými úpravami se závislost či nezávislost vektorů nemění) – a uvidíme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ t & -1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1-t, & 7-3t \end{pmatrix} \cdot (1+t) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5-5t \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix}$$

a řádky matice (upravené a stejně tak i původní) budou LZ $\Leftrightarrow 1-t=0 \Leftrightarrow \underline{t=1}$

nebo, užitím determinantu – matice čtvercová je singulární $\Leftrightarrow$ její determinant je roven nule:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ t & -1 & 7 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ t & -1 & 7 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5 + t(-5) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

(ii) kombinace, kterou je vytvořen $\vec{o}$ z $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 = (1,-1,7)$ (teď už)

$\Leftrightarrow$? $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (0,0,0)$ tak, aby $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 = \vec{o}$:

Pro $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ máme tak soustavu rovnic

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$ tj. řešíme „Gaussem":

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \left.\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 - 2\alpha_3 &= 0 \end{aligned}\right\} : \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= -3t \\ \alpha_2 &= 2t \\ \alpha_3 &= t \end{aligned}$$

(stačí $t = 1$)

zk: $\underline{-3(1,1,3) + 2(1,2,1) + (1,-1,7) = (0,0,0)}$

(iii) <u>nebo lze danou úlohu řešit „najednou":</u>

tj.: mají-li být vektory $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ LZ, musí existovat α, β tak, aby $\alpha\vec{v_1} + \beta\vec{v_2} = \vec{v_3}$, pak takové už budeme mít kombinaci, ve které je „stvořen" vektor nulový –
– pokud α, β nalezneme, a to zřejmě bude záviset na volbě $\underline{t}$. Pak bude $\alpha\vec{v_1} + \beta\vec{v_2} - \vec{v_3} = \vec{o}$ – tím je úkol splněn – tedy:

? α, β tak, aby

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\-1\\7\end{pmatrix},$$

napíšeme soustavu pro α, β neznámé a řešíme „Gaussem":

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & t\\1 & 2 & -1\\3 & 1 & 7\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & t\\0 & 1 & -1-t\\0 & -2 & 7-3t\end{array}\right) \underset{(a+)}{\overset{|\cdot 2}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & t\\0 & 1 & -1-t\\0 & 0 & 5-5t\end{array}\right)$$

a je odtud „hrubě" vidět – soustava pro α, β bude mít řešení $\iff t-1=0 \iff t=1$;

a pak pro α, β máme soustavu: $\begin{array}{l}\alpha+\beta = 1\\ \beta = -2\end{array} \Rightarrow \alpha = 3$,

<u>tj. platí $3(1,1,3) - 2(1,2,1) - (1,-1,7) = 0$</u>

(viz „souvislost" s oddílem (ii)).

2. a) Definujte pojem base vektorového prostoru V a vysvětlete, co rozumíme souřadnicemi vektoru vzhledem k dané basi .
b) Ukažte dle definice, že vektory
$$\vec{b}_1=(1,-1,0),\ \vec{b}_2=(1,-1,-1),\ \vec{b}_3=(0,1,-2)$$
tvoří basi prostoru R^3 .
c) Najděte souřadnice vektoru $\vec{x}=(1,-1,1)$ vzhledem k basi $\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\}$.
d) Najděte souřadnice vektoru $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ vzhledem k basi $\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\}$.

---

a) Je-li V vektorový prostor, pak bází V je skupina vektorů $\mathcal{B}=(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\dots,\vec{b}_n)$, $\vec{b}_i\in V$ taková, že

(i) $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\dots,\vec{b}_n$ jsou lineárně nezávislé vektory (LNZ)

(ii) každý vektor $\vec{v}\in V$ je jejich lineární kombinací (dále píšu LK), tj. ex. čísla $(v_1,v_2,\dots,v_n)$ tak, že (*) $\vec{v}=v_1\vec{b}_1+v_2\vec{b}_2+\dots+v_n\vec{b}_n$, přičemž n-tice $(v_1,v_2,\dots,v_n)$ je dána jednoznačně (tj. existuje jediná $(v_1,v_2,\dots,v_n)$ tak, že platí (*)).

$(v_1,v_2,\dots,v_n)$ – souřadnice vektoru $\vec{v}$ vzhledem k bázi $(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\dots,\vec{b}_n)$.

(iii) – a důležitá poznámka: Má-li prostor V bázi $\mathcal{B}=(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\dots,\vec{b}_n)$, pak má V nekonečně mnoho „jiných" bází a všechny tyto báze V mají stejný počet vektorů – počet prvků báze – dimense V, píšeme $\dim V=n$ (zde)

(učili jsme bez důkazu – ten je trochu „obtížný")

b) Je dána trojice $\vec{b}_1=(1,-1,0)$, $\vec{b}_2=(1,-1,-1)$, $\vec{b}_3=(0,1,-2)$ – – tvoří $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$ bázi R^3 –

zde (stejně jako v R^n, $n\geq 2$) stačí ukázat, že vektory dané jsou LNZ – protože jsou 3 – v R^3 máme už tu základní bázi $\vec{e}_1=(1,0,0)$, $\vec{e}_2=(0,1,0)$, $\vec{e}_3=(0,0,1)$)

tak jakákoli trojice LNZ vektorů je báze:

a LNZ vektorů $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$ můžeme ukázat „stejně“ jako v příkladu 1) – tj. buď úpravou „matice“ vytvořené z těchto vektorů (řádky nebo i sloupce mohou být zadané vektory – $h(A) = h(A^T)$ – a nebo můžeme zase „spočítat“ determinant vytvořené matice z daných vektorů – $\det A \neq 0 \overset{u}{\Leftrightarrow} A$ je regulární $\Leftrightarrow$ řádky (sloupce) matice A jsou LNZ:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ tj.}$$

vektory $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$ jsou LNZ (připomínám z 1), že ekvivalentní úpravy „nemění“ LZ či LNZ)
<u>a tedy $(\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3})$ tvoří bázi</u>

nebo

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

úprava – od 2. řádku odečteme 1. řádek

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1(-1)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow$$

rozvinu dle 1. sloupce

(opět) řádky, tj. $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$ jsou LNZ, tj. <u>báze</u>

nebo třeba

$$\det B^T (= \det B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \underset{2.ř. + 1.ř.}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

3. Je dána matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Najděte všechny vektory $\vec{v}$ z R^5, pro které platí $A \cdot \vec{v}^T = \vec{o}^T$

b) Ukažte, že tyto vektory tvoří podprostor prostoru R^5 dimense 2.

---

a) početní „přepis" – máme najít všechny vektory $\vec{v} \in R^5$,

tj. $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ tak, aby $A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(označení – je-li $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$,

pak $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \vec{v}^T$ (transponovaná „matice" k $(n,1)$) –

(můžeme $\vec{v}^T$ též psát v (bez šipky))

– tedy máme najít všechna řešení soustavy $A \cdot v = 0$,

tj. (řešíme Gaussovou eliminací) – za čarou „nic nepíšeme", jsou-li na pravé straně jen 0!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{2.r.-1.r.}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{3.r.-2.r.}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

a soustava rovnic pro souřadnice (složky) vektoru v – v_1, v_2, v_3, v_4, v_5!

(1) $v_1 + v_2 + v_3 + 2v_4 + v_5 = 0$

(2) $v_2 - v_3 - 5v_4 = 0$

(3) $v_3 + v_4 = 0$

– máme tři „nezávislé" rovnice pro 5 neznámých – tj. dvě z nich můžeme volit – budeme mít 2 parametry:

zvolíme-li (např.)

$v_4 = s$, $s \in R$, pak $v_3 = -s$, $v_5 = t$ (zvolíme), $t \in R$ a pak (str. 6)

2(2): $v_2 = v_3 + 5v_4 = -s + 5s = 4s$

2(1): $v_1 = -v_2 - v_3 - 2v_4 - v_5 = -4s + s - 2s - t = -5s - t$

Tedy přehledněji (vektorově – lépe „vidíme" hledané vektory z úlohy)

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5s - t \\ 4s \\ -s \\ s \\ 0 + t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(t, s \in R)$

lze napsat jako LK dvou vektorů

A můžeme teď odpovědět na otázku v b)

vektory $\vec{w}_1 = (-5, 4, -1, 1, 0)$ a
$\vec{w}_2 = (-1, 0, 0, 0, 1)$ jsou LNZ (stačí „vidět" poslední dvě složky – (např. – $\vec{w}_2$ není násobek $\vec{w}_1$)

a všechna řešení jsou jejich LK, tj. $\vec{v} = s\vec{w}_1 + t\vec{w}_2$, $t, s \in R$

– tedy řešení „tvoří" množinu, která je (označme K)

K: { 1) částí prostoru R^5
2) má vlastnosti vektorového prostoru – součet lib. dvou řešení je opět řešení, násobek lib. řešení je opět řešení –

– a množina $W \subset V$, pr. (V – vekt. prostor), která má vlastnosti 1), 2), – se nazývá podprostor – (tj. spec. podmnožina) – sama je prostorem. A zde – všechny prvky množiny řešení jsou kombinací 2 vektorů LNZ $\Rightarrow$ dim $K = 2$

4. Je dána matice $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Ukažte, že k matici B existuje matice inverzní a určete ji (Gauss-Jordanovou metodou i užitím determinantů). Ověřte správnost výpočtu matice B^{-1}.

b) Užitím B^{-1} řešte rovnici $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ a proveďte zkoušku správnosti řešení.

---

a) k matici B (čtvercové) existuje matice inverzní B^{-1} $\Leftrightarrow$ B je regulární matice (tj. je-li B řádu n, pak $h(B)=n$ nebo $\Leftrightarrow$ $\det B \neq 0$) ;

pro B a B^{-1} platí: $B \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot B = I$ (jednotková)

(tak se „udělá" zkouška správnosti výpočtu B^{-1})

a především „výpočet" B^{-1}:

buď (i) – Gauss-Jordanova metoda – schematicky:

$(B \mid I) \sim \ldots \sim (I, B^{-1})$ (B-regulární matice)

nebo (ii) (pomocí determinantů) (B reg. $\Leftrightarrow$ $\det B \neq 0$)

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B}\,(B_{ij})^T$$

$(B_{ij})^T$ – tzv. adjungovaná matice – kde

B_{ij} – algebraický doplněk k prvku b_{ij} v matici B

(tj. $B_{ij} = (-1)^{i+j} S_{ij}$, kde „subdeterminant" S_{ij} je determinant matice, která vznikne z matice B „škrtnutím" i-tého řádku a j-tého sloupce.

a výpočet B^{-1}:

(i) $\det B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$

úpravme – k 1. a 2. sloupci přičteme 3. sloupec
(to se „smí" bez změny hodnoty determinantu)

$\Rightarrow$ B je regulární matice a tedy k ní existuje inverzní B^{-1}

(víme to na „začátku", před Gauss-Jordanem", ale i při této metodě by vyšlo (při úpravách B) najevo, zda B je regulární, či není)

(ii) výpočet B^{-1}:

a) „Gauss-Jordan:"

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

2.ř. − 2×1.ř. + 3.ř. − 2×1.

$$\underset{\substack{1.ř.+3.ř. \\ 2.ř.-3.ř.}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{1.ř.+2.ř. \\ \text{a pak } 2.ř.\cdot(-1)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

, tj. vidíme, že

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

, a „zkouška":

$$B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) a užitím determinantů:

$$\det B = 1, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow B_{ij} = \begin{pmatrix} (+)1 & (-)1 & (+)0 \\ (-)1 & +0 & (-)2 \\ +0 & -(-1) & +1 \end{pmatrix}, \text{ a tedy}$$

((+) nebo (−) jsou naznačená znaménka S_{ij})

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} B_{ij}^{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$ – opět „vyšlo" !

b) Vede-li soustava rovnic se čtvercovou maticí B, tj.

$B . x = b$, a ex.-li inverzní matice B^{-1},

pak: $x = B^{-1} b$ (neboť: $B x = b \;|\cdot B^{-1}$

$B^{-1}(Bx) = B^{-1} b$

asoc. zákon: $(B^{-1}B).x = B^{-1}b$ a tedy

$I \; x = B^{-1} b$)

A tedy zde: řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ je } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

zkouška:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{cbd.})$$

5. Spočítejte determinant $\begin{vmatrix} a & -a & 2a & a \\ b & -b & 0 & b \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3c & -c & 2c & c \end{vmatrix}$

Připomenutí - výpočet determinantu:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$; pro determinant 3×3 – Sarrusovo pravidlo - zopakujte)

pro $n \geq 3$ se hodí: A - $(n \times n)$ matice:

def: $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$, $i = 1, 2 .. n$ - rozvoj dle i-tého řádku

(A_{ij} - algebraický doplněk k a_{ij})

$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$, rozvoj dle j-tého sloupce

a úpravy pro „zjednodušení" rozvoje dle řádku (nebo dle sloupce)

(protože $\det A = \det A^T$, vše, co platí „pro řádky" platí „i pro sloupce" matice A)

1) výměna pořadí dvou řádků (sloupců) ⇒ determinant „mění" znaménko

2) má-li matice dva řádky (sloupce) shodné ⇒ $\det = 0$

3) vynásobíme-li v determinantu řádek (sloupec) číslem c, vynásobí se i determinant („celý") číslem c

4) k libovolnému řádku (sloupci) determinantu můžeme přičíst násobek (libovolný) jiného řádku (sloupce), aniž se změní hodnota determinantu

Tyto úpravy provádíme při výpočtu determinantu „s cílem" upravit řádek (nebo sloupec) tak, aby obsahoval co nejvíce „nul" a pak je rozvoj (viz definice) jednodušší!

<u>A nyní tedy výpočet determinantu</u> (občas s „výkladem")

$$\begin{vmatrix} a & -a & 2a & a \\ b & -b & 0 & b \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3c & -c & 2c & c \end{vmatrix} = a \cdot b \cdot c \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

(dle 3)

(lze „vytknout" číslo z řádku (i sloupce))

vidíme, že je šikovný 2. řádek v determinantu – už má 1 nulu a další „vyrobíme" pomocí $(-1) = a_{22}$ (k 1. a 4. sloupci přičteme 2 sl)

$$= abc \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \cdot abc =$$

rozvoj dle 2. řádku

$$= -abc \cdot 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4abc\cdot(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

rozvoj dle 1. řádku (též nejlépe dle 3. sloupce)

$$= 4abc\,(-(-1)) = \underline{4abc}$$

6. Existuje reálné číslo a, pro které je singulární matice $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a-1 & a^2 \\ 1 & 2a & -a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & a^3 & 1 \end{pmatrix}$?

(i) Úpravou matice A (tj. ekvivalentními úpravami – LZ či LNZ řádků se hodnost matice nemění)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a-1 & a^2 \\ 1 & 2a & -a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & a^3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2a & -a & 1 \\ 0 & 2 & a^3 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

tedy odtud je „hned vidět": A je regulární $\Leftrightarrow$ $a-1 \neq 0$, tj.

A – singulární $\Leftrightarrow$ $a = 1$

(ii) nebo užitím determinantu matice (komplikovanější – ale „účinnější"):

A – singulární $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a-1 & a^3 \\ 1 & 2a & -a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & a^3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & a-1 & a^3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & a^3 & 1 \end{vmatrix} = -(-1)^{3+1} \cdot 2 \begin{vmatrix} a-1 & a^3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

rozvoj dle 1. sloupce („alternující" sloupec) – opět – rozvoj dle 1. sloupce

$$= -2\left(3(a-1)\right) = -6(a-1)$$

tj. A bude singulární $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$ $\Leftrightarrow$ $a=1$

(opět „vyšlo"!)